Mathe-Quali 2001: Aufgaben mit Lösungen

QA 2001: Aufgabengruppe I, Nr. 1

Stelle folgende Gleichungen auf, ohne sie zu lösen.

a) Wenn du die Summe aus einer Zahl und 5 verdoppelst und das Ergebnis um 4 verminderst, erhältst zu den vierten Teil der Differenz aus 72 und dem 4-fachen der gesuchten Zahl.

b) Addiere 9 zum 7-fachen einer Zahl. Wenn du nun die Summe mit 5 multiplizierst und vom Produkt 200 subtrahierst, so erhältst du den Quotienten aus dem 8-fachen der Zahl und 2.

Lösung

a) $(x + 5) * 2 - 4 = (72 - 4x) : 4$

Die Lösung zu a) wäre

$$
\begin{aligned}
2x + 10 - 4 &= 18 - x && | + x \\
3x + 6 &= 18 && | - 6 \\
3x &= 12 && | : 3 \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

b) $(7x + 9) * 5 - 200 = 8x : 2$

Die Lösung wäre

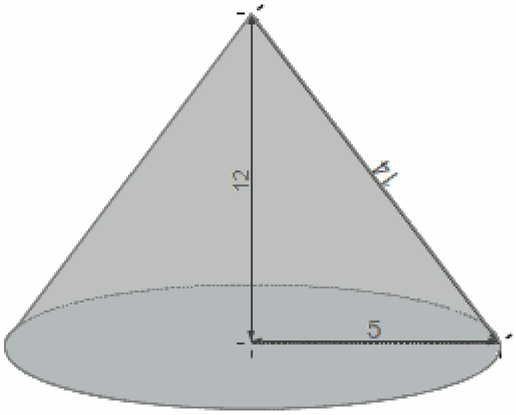
$$
\begin{aligned}
35x + 45 - 200 &= 4x && | - 4x \\
31x - 155 &= 0 && | + 165 \\
31x &= 155 && | : 31 \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

QA 2001: Aufgabengruppe I, Nr. 2

Ein massiver Kegel aus Messing (Dichte: ρ = 8,1 g/cm³)?) wiegt 2 543,4 g. Der Durchmesser der Grundfläche beträgt 10 cm.

a) Berechne das Volumen des Kegels.
b) Wie hoch ist der Kegel?
c) Gib die Mantelfläche des Kegels an.

Lösung



a) Volumen

1 cm³ = 8,1 g
? cm³ = 2 543,4 g
2 543,4 : 8,1 = **314 cm³**

b) Höhe des Kegels

V = A * h : 3
314 = 5 * 5 * 3,14 * h : 3 | * 3 : 3,14 : 5 : 5
12 = h

c) Mantel

M = r * 3,14 * s_h
sh² = 5² + 12²
sh² = 169 | √
sh = 13
M = 5 * 3,14 * 13 = **204,1 cm²**

QA 2001: Aufgabengruppe I, Nr. 3

3. Ein Schülercafé einer Hauptschule soll in acht Wochen eröffnet werden, wofür 6 Schüler pro Woche jeweils 4 Stunden arbeiten müssen. Nach zwei Wochen fahren 2 dieser Schüler auf Klassenfahrt und fallen für eine Woche aus.
Wie viele Minuten pro Woche müssen alle Beteiligten nach Ende der Klassenfahrt mehr arbeiten, damit das Schülercafé zum geplanten Termin fertig wird?

Lösung

1 Schüler in 1 Woche: 4 h = 240 min
Ausfall durch Klassenfahrt
2 Schüler in 1 Woche: 240 min * 2 = 480 min
In den letzten 5 Wochen müssen 480 min aufgeholt werden.

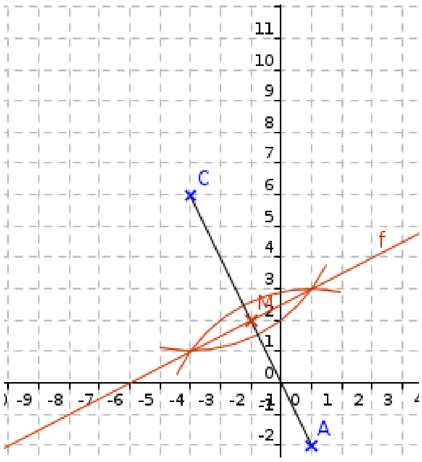
6 Schüler müssen in 5 Wochen mehr arbeiten: 480 min
6 Schüler müssen in 1 Woche mehr arbeiten: 480 : 5 = 96 min
1 Schüler muss in 1 Woche mehr arbeiten: 96 : 6 = 16 min

Jeder Schüler muss in den letzten 5 Wochen 16 Minuten pro Woche mehr arbeiten.

QA 2001: Aufgabengruppe I, Nr. 4

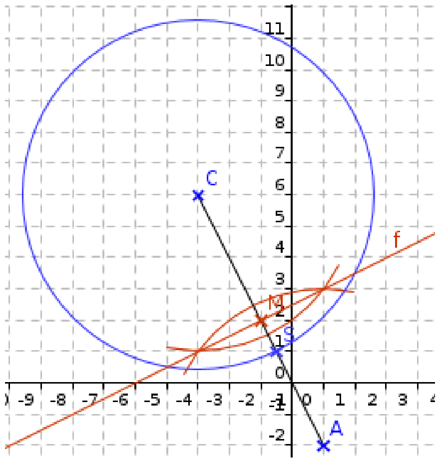
4. Erstelle ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm), dessen Nullpunkt ungefähr in der Mitte eines unbeschriebenen Blattes liegt.
Zeichne die Punkte A (1 | -2) und C (-3 | 6) ein. Die beiden Punkte sind die Eckpunkte des Vierecks ABCD.

a) Konstruiere die Mittelsenkrechte f zu [AC]. Bezeichne den Schnittpunkt von [AC] und f mit M.



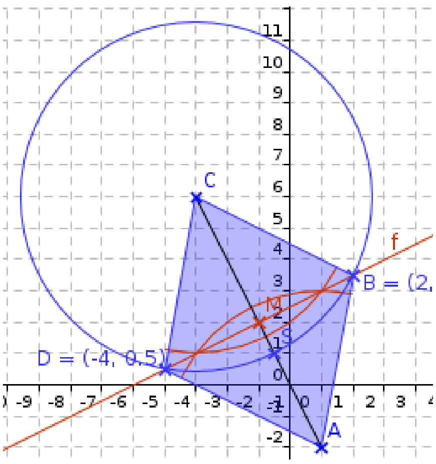
- Die Punkte A und C zeichnen und verbinden
- Teilkreise um A und C mit gleichem Radius zeichnen (rot)
- Durch die Schnittpunkt der Teilkreise verläuft die Mittelsenkrechte f
- Der Schnittpunkt von f mit der Strecke AC hat die Koordinaten M(-1 | 2)

b) Zeichne einen Kreis um C durch den Punkt S (-0,5 | 1).



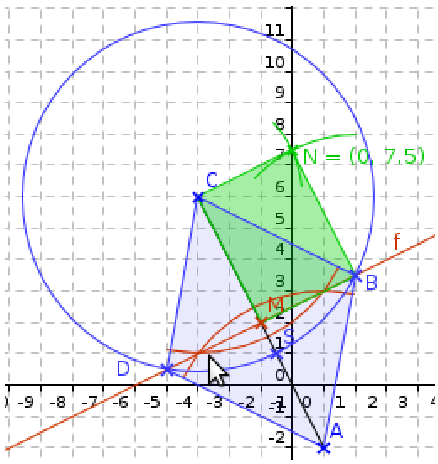
- Den Punkt S einzeichnen (blau)
- Um C einen Kreis mit dem Radius CS zeichnen (blau)

c) Die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden f sind die fehlenden Eckpunkte B und D des Vierecks. Gib ihre Koordinaten an und verbinde die Punkte A, B, C und D zum Viereck.



- Die Schnittpunkte des Kreises mit der Mittelsenkrechten mit B und D benennen
- Die Koordinaten: **B(2 | 3,5)** und **D(-4 | 0,5)**
- Die Punkte A, B, C und D zum Viereck ABCD verbinden (blau)

d) Konstruiere den Punkt N so, dass das Rechteck MBNC entsteht. Gib die Koordinaten von N an.



- Um B einen Teilkreis mit Radiuus r=MC zeichnen (grün)
- Um C einen Teilkreis mit Radiuus r=MB zeichnen (grün)
- Der Schnittpunkt der Teilkreise ist der Punkt D des Rechtecks MBNC. Er hat die Koordinaten **M(0 | 7,5)**

2001 - Aufgabengruppe II, Nr. 1

$$\frac{2-7x}{12}-\frac{14-17x}{60}=\frac{2-3x}{5}-2\frac{x-1}{3}-\frac{1}{6}$$

Lösung

Mit Hauptnenner 60 multiplizieren

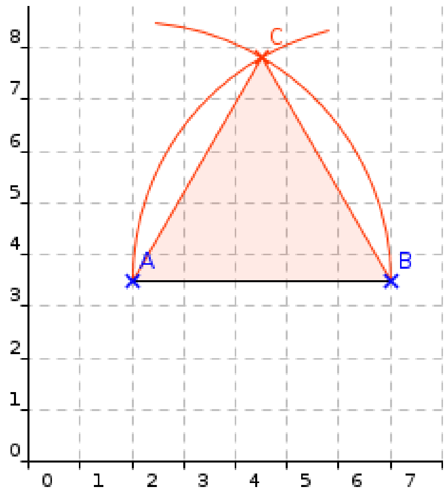
5 * (2 - 7x) -14 + 17x = 12 * (2 - 3x) - 40 * (x - 1) - 10

10 - 35 x - 14 + 17 x	=	24 - 36x - 40 x + 40 - 10	
- 4 - 18 x	=	54 - 76 x	| + 76 x
- 4 +58 x	=	54	| + 4
58 x	=	58	| : 58
x	=	1	

QA 2001: Aufgabengruppe II, Nr. 2

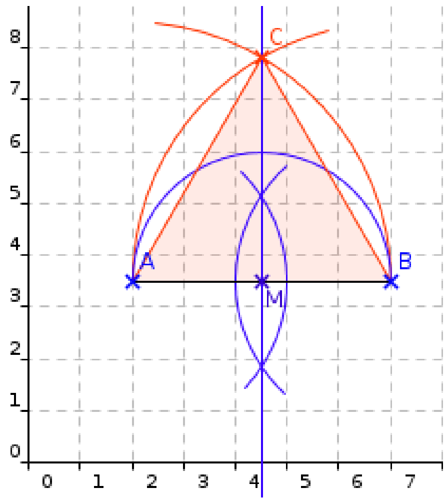
4. Trage in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte A (2 | 3,5) und B (7 | 3,5) ein.

a) Konstruiere das gleichseitige Dreieck ABC.



- Die Punkte A und B zeichnen und verbinden
- Teilkreise um A und C mit Radius r = !B zeichnen (rot)
- Der Schnittpunkt der Teilkreise ist die Ecke C (rot)
- Die Punkte A, B und C zum Dreieck ABC verbinden.

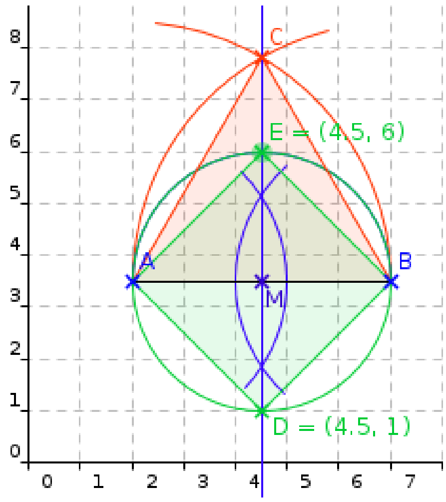
b) Konstruiere einen Halbkreis über der Strecke [AC].



- Um die Punkte A und B Teilkreis schlagen (blau)
- Durch die beiden Schnittpunkte der Teilkreise verläuft die Mittelsenkrechte zur Strecke AB, die diese halbiert (blau)
- Um den Mittelpunkt M einen Halbkreis mit dem Radius r= MB zeichnen (blau)

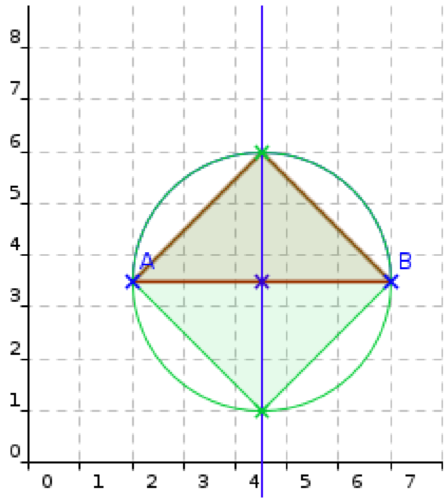
c) Die Strecke [AB] ist die Diagonale des Quadrates ADBE. Konstruiere das Quadrat.

d) Gib die Koordinaten der Punkte D und E an.



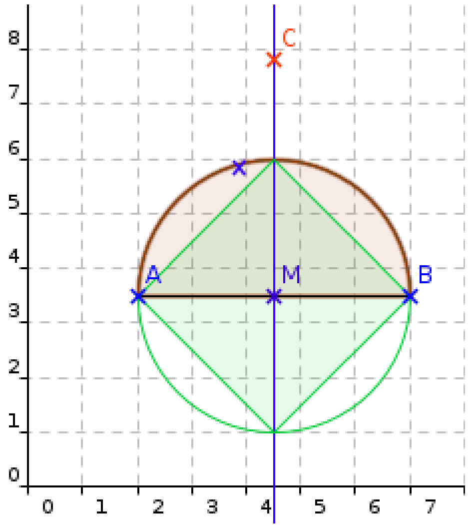
- Um den Mittelpunkt M einen Kreis mit r = MB zeichnen (grün)
- Die Schnittpunkte des Kreises mit der Mittelsenkrechten sind die Ecken D und E des Quadrates ADBE (grün)
- Koordinaten von D(4,5 | 1) und E(4,5 | 6)

e) Berechne den Flächeninhalt des Quadrates ADBE. Die Länge der Strecke [AB] kann der Zeichnung entnommen werden.



- Die Diagonale des Quadrates hat eine Länge von 5 cm. Sie ist die Grundlinie rote Teildreicks.
- Höhe des roten Teildreicks: 5 : 2 = 2,5 cm
  $A_{Dreieck}$ = 1/2 * 5 * 2,5 = 6,25 cm²
- Fläche des **Quadrates**
  $A_{Quadrat}$ = 2 * 6,25 cm² = **12,5 cm²**

f) Zeige mithilfe einer Rechnung, dass der Flächeninhalt des Halbkreises über [AC] kleiner ist als der Flächeninhalt des Quadrates



- Der Kreis hat einen Radius r = 2,5 cm
- Fläche des Kreises
  A_{Kreis} = 3,14 * r²
  A_{Kreis} = 3,14 * 2,5²= 19,625 cm²
- Fläche des **Halbkreises**
  19,625 : 2 = **9,8125 cm²**

Der Halbkreis ist mit 9,8125 cm² kleiner als das 12,5 cm² große Quadrat.

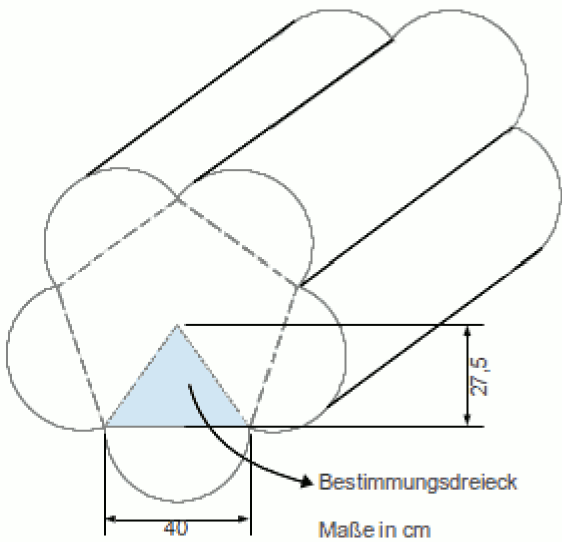
QA 2001: Aufgabengruppe II, Nr. 3

3. Ein Geschäftsmann hat eine Rechnung über 11 100 DM nicht rechtzeitig bezahlt. Bei einem Zinssatz von 12 % muss er deshalb 296 DM Verzugszinsen zahlen.
   a) Um wie viele Tage wurde der Zahlungstermin überschritten?
   b) Hätte der Geschäftsmann innerhalb von 30 Tagen gezahlt, hätte er vom Rechnungsbetrat 3 % Skonto abziehen dürfen. Wie viel Geld hätte er dann im Vergleich zur verspäteten Bezahlung gespart?

Lösung

a) Z = K * p * t / (100 * 360)
296 = 11 100 * 12 * t / 36000
296 = 111 * 12 * t / 360
296 = 111 * t / 30 | * 30 : 111
80 = t
Der Zahlungstermin wurde um **80 Tage** überschritten.

b) Betrag abzüglich Skonto: 97 % von 11 100 DM
100 % = 11 100 DM
1 % = 11 100 : 100 = 111 DM
97 % = 111 * 97 = 10 767 DM
Ersparnis
11 100 + 296 - 10 767 = 629 DM
Er hätte **629 DM** sparen können.



QA 2001: Aufgabengruppe II, Nr. 4

Bei Ausgrabungsarbeiten wurde eine Granitsäule von 2,6 m Länge gefunden, deren Querschnitt sich aus einem regelmäßigen Fünfeck und fünf Halbkreisen zusammensetzt (siehe Skizze).

a) Berechne das Volumen der Säule.

b) Kann ein Flaschenzug, der mit höchsens drei Tonnen belastet werden darf, die Säule heben (Dichte Granit: ρ = 2,6 g/cm³)?

Lösung

a) Volumen der 5 Halbkreissäulen

r = 40 : 2 = 20 cm
h = 2,6 m = 260 cm
V = 5 * A * hk : 2
V = 5 * 20 * 20 * 3,14 * 260 : 2 =
= 5 * 1 256 * 260 : 2 =
= 5 * 326 560 : 2 = 816 400 cm³

Volumen des fünfeckigen Säulenkerns

V = A * hk
V = 5 * g * h / 2 * hk
V = 5 * 40 * 27,5 / 2 * 260 =
= 5 * 550 * 260 =
= 2750 * 260 = 715 000 cm³

Gesamtvolumen

816 400 + 715 000 = **1 531 400 cm³**

b) Gewicht der Säule

1 cm³ = 2,6 g
1 531 400 cm³ = 1 531 400 * 2,6 = 3 981 640 g = **3,98 t**

Der Flaschenzug kann die Säule nicht heben.

QA-2001: Aufgabengruppe III, Nr. 1

Bei einer Geschwindigkeitsmessung vor einer Schule fuhren ein Viertel der Autos bis zu 10 km/h schneller als zugelassen, ein Sechstel überschritt die Höchstgeschwindigkeit um mehr als 10 km/h (aber höchstens 30 km/h). Weitere 8 Autofahrer wurden wegen erheblicher Geschwindigkeitsübertretung von mehr als 30 km/h zur Anzeige gebracht. 384 Fahrzeuge überschritten die zulässige Geschwindigkeit nicht.

Bei wie vielen Fahrzeugen wurde an diesem Tag die Geschwindigkeit gemessen? Löse mithilfe einer Gleichung.

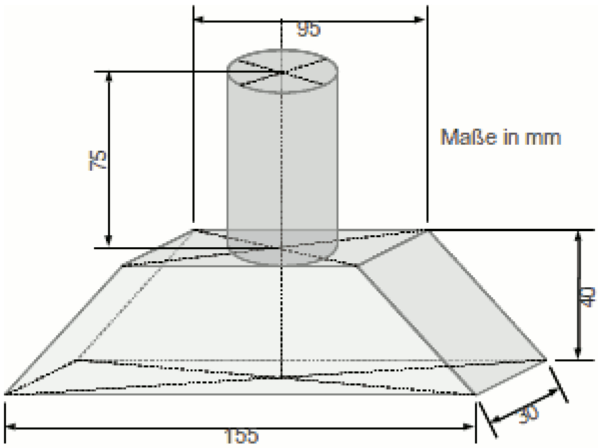
Lösung

1/ 4 bis zu 10 km/h zu schnell	1 / 6 zwischen 10 und 30 km/h zu schnell	8 über 30 km/h zu schnell	384 Autos nicht zu schnell

1 / 4 a + 1 / 6 a + 8 + 384 = a
6 / 24 a + 4 / 24 a + 392 = a
10 / 24 a + 392 = a | - 10 / 24 a
392 = 14 / 24 a | : 14
28 = 1 / 24 a | * 24
672 = a

Die Geschwindigkeit wurde bei 672 Fahrzeugen gemessen.

QA 2001: Aufgabengruppe III, Nr. 2



Berechne die Oberfläche des abgebildeten Körpers.

Lösung

Mantel des Zylinders
M = U * hk
M = d * 3,14 * hk
M = 30 * 3,14 * 75 = 7 065 mm²

Schräge des Sockels
a = (155 - 95) : 2 = 30
b = 40
s² = 30² + 40²
s² = 900 + 1600
s² = 2500 | √
s = 50

Mantel des Sockels
M = U * hk
M = (155 + 50 + 95 + 50) * 30 =
= 350 * 30 = 10 500 mm²

Trapezflächen
A = 2 * (155 + 95) : 2 * 40 =
= 2 * 5 000 = 10 000 mm²

Oberfläche
7 065 + 10 500 + 10 000 = **27 565 mm²**

QA 2001: Aufgabengruppe III, Nr. 3

Ein Bio-Landwirt lagert im Herbst 1,2 t Birnen ein. Seine Selbstkosten setzt er mit 640 € an. Während der Lagerung entsteht ein Gewichtsverlust von 18%. Der Landwirt möchte die gesamte Ware mit einem Gewinn von 32% verkaufen.

a) Berechne das Gewicht der zum Verkauf kommenden Birnen.
b) Ermittle den Verkaufspreis.
c) Stelle den Gewinn in € fest.
d) Bestimme den Endpreis pro kg (die MwSt. beträgt 8%). Runde auf 2 Stellen nach dem Komma.
e) Wie hoch wäre sein prozentualer Gewinn gewesen, wenn er das Obst unmittelbar nach der Ernte bei 520 € Selbstkosten und 752 € Gesamtverkaufspreis verkauft hätte? Runde auf 2 Stellen nach dem Komma.

Lösung

a) **Gewicht beim Verkauf bei 18 % Gewichtsverlust**

100 % = 1,2 t

1 % = 0,012 t

82 % = 0,012 t * 82 = **0,984 t**

b) **Verkaufspreis bei 32 % Gewinn**

100 % = 640 €

1 % = 6,40 €

132 % = 6,40 € * 132 = **844,8 €**

c) **Gewinn in Euro**

844,80 € - 640 € = **204,80 €**

d) **Verkauf in kg**

0,984 t = 984 kg

Endpreis für 984 kg bei 8 % MWSt

100 % = 844,80 €

1 % = 8,448 €

108 % = 8,448 € * 108 = 912,384 €

Endpreis für 1 kg

984 kg = 912,384 €

1 kg = 912,384 € : 984 = 0,927 € = **0,93 €**

e) **Gewinn in DM**

752 dm - 520 DM = 232 DM

Gewinn in Prozent

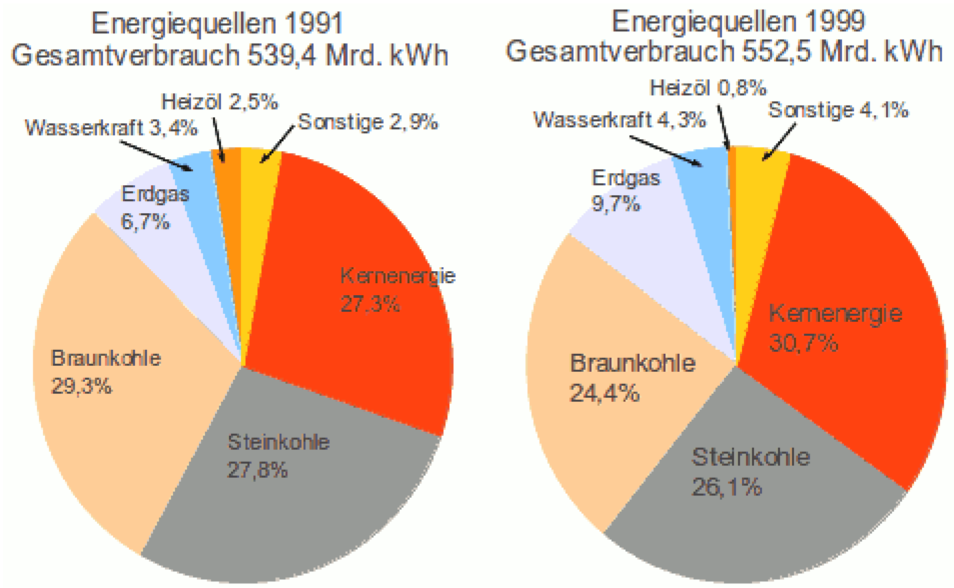
100 % = 520 DM

1 % = 5,20 DM

232 DM : 5,2 DM = **44,62 %**

QA-2001: Aufgabengruppe III, Nr. 4

Diese Diagramme veranschaulichen, woraus Strom gewonnen wurde:



Energieträger	1991 in Mrd. kWh	1999 in Mrd. kWh
Kernenergie	147,2562	169,6175
Steinkohle	149,9532	144,2025
Braunkohle	158,0442	134,8100
Erdgas	36,1398	53,5925
Wasserkraft	18,3396	23,7575
Heizöl	13,4850	4,4200
Sonstige	15,6426	22,6525

a) Verfollständige die Tabelle

b) Gib für Braunkohle und Heizöl an, um wie viel Prozent die produzierten kWh des Jahres 1999 gegenüber 1991 zu- oder abgenommen haben. Rund die Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen.

c) gramm für 1991 und 1999 gegenüber, wie sich der Bereich „Sonstige" (wie Solar-, Wind-, Biogasenergie) entwickelt hat. Verwende als Maßstab 1 cm => 2 Mrd. kWh.

Lösungen

a) **Erdgas 1991 in Mrd. kWh**

100 % = 539,4 Mrd. kWh

1 % = 5,394 Mrd. kWh

6,7 % = 5,394 * 6,7 = **36,1398 Mrd. kWh**

Kernenergie 1999 in Mrd. kWh

100 % = 552,5 Mrd. kWh

1 % = 5,525 Mrd. kWh

30,7 % = 5,525 * 30,7 = **169,6175 Mrd. kWh**

b) **Abnahme der Braunkohle in Mrd. kWh**

158,0442 - 134,8100 = 23,2342 Mrd. kWh

Abnahme in Prozent

100 % = 158,0422 Mrd. kWh

1 % = 1,580422 Mrd. kWh

23,2342 : 1,580422=14,70 %

Abnahme der Heizöl in Mrd. kWh

13,4850 - 4,4200 = 9,065 Mrd. kWh

Abnahme in Prozent

100 % = 13,4850 Mrd. kWh

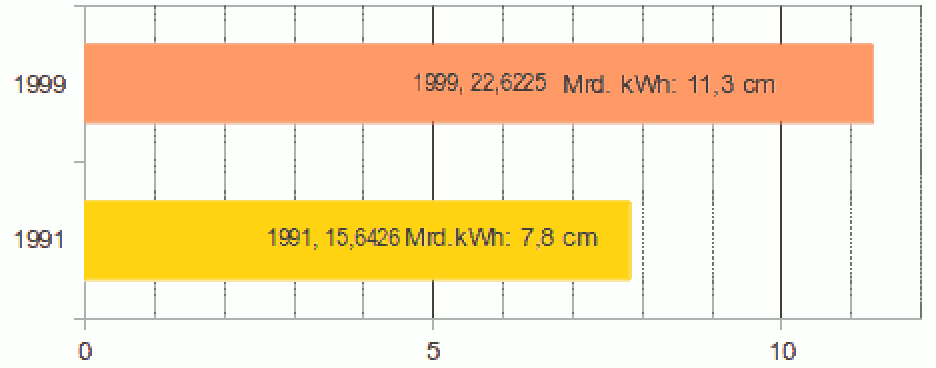
1 % = 0,134850 Mrd. kWh

9,065: 10,134850 =67,22 %

c) **Diagramm Streifenlänge**

Sonstige 1991: 15,6426 Mrd. kWh : 2 Mrd. kWH -> 7,8 cm

Sonstige 1999: 22,6525 Mrd. kWh : 2 Mrd. kWH -> 11,3 cm



2001 - Aufgabengruppe IV, Nr. 1

$$1{,}5\,x + \frac{2*(2{,}5\,x - 4{,}5)}{3} - \frac{2*(6x+11)}{5} - \frac{x-4}{2} + 3 = 0$$

Lösung

Mit Hauptnenner 30 multiplizieren

30 * 1,5 x + 10 * 2 * (2,5x - 4,5) - 6 * 2 * (6x + 11) - 15 * (x - 4) = 0

45 x + 20 * (2,5x - 4,5) - 12 * (6x - 11) - 15 x + 60 = 0

45 x + 50 x - 90 - 72 x - 132 - 15 x + 60 = 0

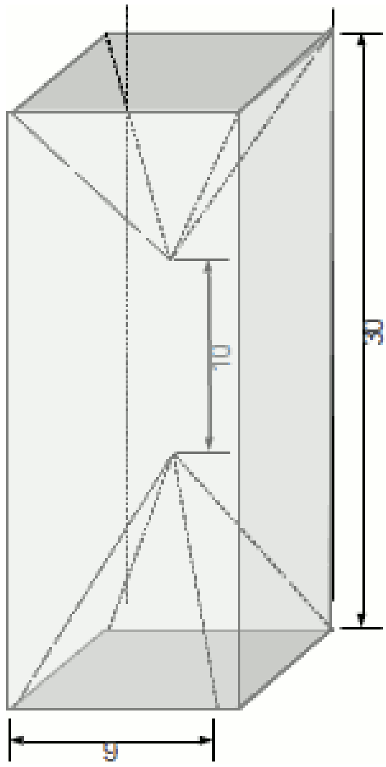
8 x - 72 = 0 | + 72

8 x = 72 | : 8

x = 9

QA 2001: Aufgabengruppe IV, Nr. 2

Eine Firma gießt Maschinenteile aus Stahl. Diese haben die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche, aus dem zwei gleich große quadratische Pyramiden ausgespart werden (siehe Skizze; Maße in mm).



a) Wie viel Gramm Stahl (Dichte Stahl: $\rho = 7{,}4$ g/cm³) werden für die Herstellung eines Teils benötigt?

b) Berechne die Oberfläche eines Maschinenteils.

Lösung

Volumen des Werkstückes

$V_{Werkstück} = V_{Quader} - 2 * V_{Pyramide}$

$V_{Werkstück} = A * hk - 2 * A * hk : 3$

$V_{Werkstück} = 9 * 9 * 30 - 2 * 9 * 9 * 10 : 3 =$

$= 2430 - 540 =$

$= 1890$ mm³ $=$

$= 1{,}89$ cm³

Gewicht des Werkstückes

1 cm³ = 7,4 g

1,89 cm³ = 7,4 * 1,89 = 13,986 g

Oberfläche

O = Mantel des Quaders + 2 * 4 Seitendreiecke der ausgefrästen Pyramiden

Mantel des Quaders

M = Umfang * hk

M = 4 * 9 * 30 = 1080 mm²

Seitenhöhe eines Dreiecks

$sh^2 = 4{,}5^2 + 10^2$

$sh^2 = 20{,}25 + 100$

$sh^2 = 120{,}25 \quad | \sqrt{}$

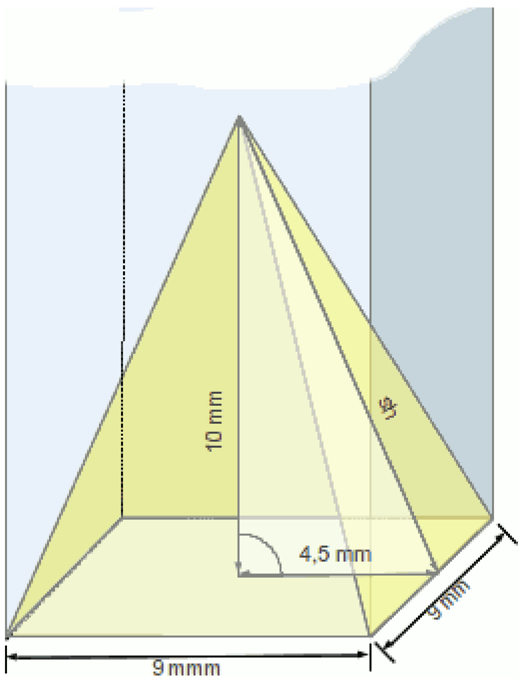
$sh = 10{,}965 \approx 11$ mm

8 Seitendreiecke

8 * 9 * 11 : 2 = 394,92 mm²

Oberfläche des Werkstücks

1080 + 396 = **1476 mm²**



QA 2001: Aufgabengruppe IV, Nr. 3

Die Diskothek "Blue Star" soll gegen Brand- und Sturmschäden versichert werden. Drei Versicherungen legen ihre Komplett-Angebote vor, die beide Schadensarten umfassen.

a) Versicherung A berechnet eine monatliche Prämie von 262,50 DM bei einem jährlichen Promillesatz von 2,1 Promille. Wie hoch ist die Versicherungssumme?

b) Versicherung B bietet eine Versicherungssumme von 1,7 Mio. DM an bei einer vierteljährlichen Prämie von 807,50 DM. Berechne den jährlichen Promillesatz.

c) Die Versicherungssumme bei Versicherung C beträgt 1,9 Mio. DM. Die Jahresprämie für die Brandversicherung allein entspricht 1,2 Promille der Versicherung. Die Jahresprämie insgesamt beträgt 3705 DM.
Berechne den jährlichen Promillesatz für die Sturmversicherung.

Lösung

a) **Jahresprämie bei Versicherung A**

1 Monat: 262,50 DM
12 Monate: 262,50 DM * 12 = 3 150 DM
Versicherungssume
2,1 ‰ = 3 150 DM
1 ‰ = 3 150 DM : 2,1 = 1 500 DM
1000 ‰ = 1 500 DM * 1000 = **1 500 000 DM**

b) **Jahresprämie bei Versicherung B**

3 Monate = 807,50 DM
12 Monate = 807,50 DM * 4 = 3 230 DM
Promillesatz
1000 ‰ = 1 700 000 DM
1 ‰ = 1 700 000 DM : 1000 = 1 700 DM
3 230 DM : 1 700 DM = **1,9 ‰**

c) **Brandversicherung bei Versicherung C**

1000 ‰ = 1 900 000 DM
1 ‰ = 1 900 DM
1,2 ‰ = 1 900 DM * 1,2 =**2 280 DM**
Sturmversicherung bei Versicherung C
3 705 DM - 2 280 DM = 1 425 DM
Promillesatz der Sturmversicherung
1000 ‰ = 1 900 000 DM
1 ‰ = 1 900 DM
1 425 DM : 1 900 DM = **0,75 ‰**

QA 2001: Aufgabengruppe IV, Nr. 4

Alle bekannten Stoffe sind aus einzelnen Atomen aufgebaut. Die Stoffe unterscheiden sich nur durch die unterschiedliche Anzahl der Kernteilchen. Der Kern ist aus elektrisch positiven Protonen (Masse ca. $1{,}673 * 10^{-24}$ g) und etwa gleich schweren Neutronen aufgebaut.

1. Berechne die Masse eines Elektrons. Es wiegt den 1836 Teil eines Protons.
2. Der Kern eines Uran-Atoms besteht aus 92 Protonen und 146 Neutronen. Berechne die Masse des Atomkerns.

Lösung

a) **Masse eines Elektrons**

$1{,}673 * 10^{-24}$ g : 1836 =

= $0{,}091122.. * 10^{-24}$ g =

= **$9{,}1122.. * 10^{-26}$ g**

b) **Masse des Atomkerns**

92 Protonen + 146 Neutronen = 238 Kernteilchen

1 Kernteilchen: $1{,}673 * 10^{-24}$ g

238 Kernteilchen: $1{,}673 * 10^{-24}$ g * 238 = $398{,}174 * 10^{-24}$ g = **$3{,}98174 * 10^{-22}$ g**